

П. А. Стеблянко, *д.ф.-м.н., профессор*,
Днепропетровский государственный технический университет
ул. Днепропетровская, 2, г. Днепропетровск, 51918, Украина
steblyanko@rambler.ru

К. Э. Демичев, *ассистент*
Черкасский государственный технологический университет
б-р Шевченко, 460, г. Черкассы, 18006, Украина
demichev@mail.ru

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В РАСТУЩЕЙ ПО ИЗВЕСТНОМУ ЗАКОНУ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

Рассматривается вопрос определения поведения нестационарного термонапряженного состояния цилиндрической трубы, которая растет по определенному закону. Характерной особенностью цилиндрических тел при таких термомеханических процессах является перераспределение температуры, напряжений и деформаций, обусловленное непрерывным или дискретным добавлением материала.

Для определения термонапряженного состояния используется один из наиболее эффективных приемов при численном решении пространственных нестационарных задач теории термоупругопластичности – метод покомпонентного расщепления в сочетании с представлением неизвестных величин в виде сплайн-функций.

Ключевые слова: нестационарное термонапряженное состояние, метод покомпонентного расщепления, сплайн-функции.

Введение. При исследовании термомеханического поведения растущих тел характерной особенностью является постоянное (в процессе роста) перераспределение температуры, напряжений и деформаций, обусловленное непрерывным или дискретным добавлением материала. Поэтому, на наш взгляд, определение напряженно-деформированного состояния должно производиться в нестационарной постановке, что подтверждается расчетами [3, 6]. Выход на стационарный режим возможен в результате установления решения задачи, после того как тело прекращает расти.

Целью работы является определение напряженно-деформированного состояния растущего цилиндрического тела методом покомпонентного расщепления с помощью кубических В-сплайнов и получение численных отношений напряжений.

Постановка осесимметричной нестационарной задачи термоупругости для растущего цилиндрического тела. Пусть первоначально изотропный цилиндр (длиной L , внутренней поверхностью $r = R_0$, внешней поверхностью $r = R_1$) в начальный момент времени $t = 0$ находится в ненапряженном состоянии при температуре $T = T(R, z)$, $T \in [T_0; T_1]$, z – ось цилиндра. В момент вре-

мени $t = t_1$ с наружной стороны добавляется цилиндр с внешней поверхностью $r = R_2$ с постоянно распределенной по толщине температурой, равной T_1 . В результате после изменения геометрических размеров цилиндра температурное поле начнет перераспределяться (начнет выходить на новый стационарный режим), что вызовет соответствующие изменения в напряженно-деформированном состоянии. Таким образом, для его определения необходимо решать нестационарную задачу термоупругопластичности. Граничными являются узлы: узел 1 ($r = R_0$), узел 9 ($r = R_1$), узел 11 ($r = R_2$). Узел 10 – середина добавленного цилиндра (рис. 1).

Определим напряженно-деформированное состояние цилиндра.

Решение нестационарной осесимметричной задачи термоупругости для растущего цилиндрического тела методом покомпонентного расщепления. Все неизвестные величины (скорости перемещений, компоненты тензоров напряжений и деформаций) на каждом дробном шаге по времени задавались в виде кубических В-сплайнов [4]. Будем рассматривать такие процессы, при которых реологические свойства материала не проявляются. Для решения поставленной задачи

используются уравнения движения в цилиндрической системе координат.

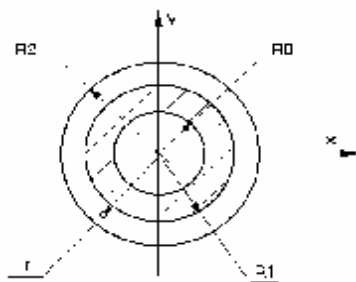


Рис. 1

Соотношения Коши, продифференцированные по времени, и физические соотношения вида [2]

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = a_{ijkl} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t} + b_{ij}, \quad (1)$$

где $b_{ij} = -[K\alpha_T + (T - T_0) \frac{\partial}{\partial t}(K\alpha_T)]\delta_{ij} \frac{\partial T}{\partial t}$.

$$\omega_r = \left\{ \begin{array}{l} t_p; t_{p+1/2} = t_p + \tau_1; t_{p+1} = t_{p+1/2} + \tau_2; \\ \tau = \tau_1 + \tau_2; t_0 = 0; p = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right\}. \quad (4)$$

Идея метода покомпонентного расщепления состоит в том, что вместо векторного уравнения (3) на полном шаге интегрирования по времени τ ($t \in [t_p; t_{p+1}]$) последовательно решаются два эквивалентных ему одномерных векторных уравнения, каждое на своем дробном шаге по времени.

Обозначим $\vec{W}^{p+n/2}$ вектор \vec{W} , вычисленный для момента времени $t = t_{p+n/2}$ ($n = 0, 1, 2$). Аналогичные обозначения вводятся и для

$$\frac{1}{\tau}(\vec{W}^{p+1/2} - \vec{W}^p) = \alpha \Lambda_1 \vec{W}^{p+1/2} + \beta \Lambda_1 \vec{W}^p + \gamma_1 \vec{B}^p, \quad (5)$$

$$\frac{1}{\tau}(\vec{W}^{p+1} - \vec{W}^{p+1/2}) = \alpha \Lambda_3 \vec{W}^{p+1} + \beta \Lambda_3 \vec{W}^{p+1/2} + \gamma_3 \vec{B}^{p+1/2},$$

где $\alpha + \beta = 1, \gamma_1 + \gamma_3 = 1$, а дифференциальные операторы $\Lambda_n \vec{W}$ [2].

В случае, когда $\alpha = 0, \beta = 1$, схема (9) будет явной. При $\alpha = 1, \beta = 0$ выражение (5) дает неявную схему. Если же $\alpha = \beta = 1/2$, то имеет место схема Кранка–Николсона, которая, в отличие от двух предыдущих схем первого порядка аппроксимации по τ , имеет второй порядок аппроксимации [5, 7, 8]. Процесс решения системы (9) на полном шаге по вре-

Распределение температуры для цилиндра в разные моменты времени определяется путем решения уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{a}{r} \left(r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + r \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial T}{\partial z} \right). \quad (2)$$

Решение полной системы уравнений производилось при помощи метода дробных шагов по времени, которая приводится к виду [1, 2]:

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = A_1 \frac{\partial \vec{W}}{\partial r} + A_3 \frac{\partial \vec{W}}{\partial z} + \vec{B}, \quad (3)$$

где \vec{W} – вектор, компонентами которого будут искомые величины ($w_1 = v_r; w_2 = v_z; w_3 = \sigma_{rz}; w_4 = \sigma_{\phi r}; w_5 = \sigma_{\phi z}; w_6 = \sigma_{\phi \phi}$). Составляющие вектора \vec{B} и элементы матриц $A_i, i = 1, 3$ определяются путем сопоставления исходной системы и векторного уравнения (3).

Введем в рассмотрение сетку по времени ω_r с учетом дробных шагов интегрирования по времени:

вектора \vec{B} . При переходе от уравнений (3) к разностной схеме их решения производные по времени заменяются разностными отношениями, а производные по координатам представляются линейной комбинацией производных, заданных на предыдущем временном слое $t_{p+(n-1)/2}$ и на том, на котором ищется решение $t_{p+n/2}$. В результате этого расчетную схему можно записать так:

мени состоит из двух шагов. Сначала на основании первого уравнения разыскивается вспомогательный вектор $\vec{W}^{p+1/2}$. При этом вектор \vec{W}^p уже известен или из предыдущего шага по времени, или из начальных условий. Потом из второго уравнения определяется вектор \vec{W}^{p+1} .

Расчетные формулы явной схемы метода расщепления можно записать так:

$$\begin{aligned}\bar{W}^{p+1/2} &= \bar{W}^p + \tau \{ \Lambda_1 \bar{W}^p + \gamma_1 \bar{B}^p \}, \\ \bar{W}^{p+1} &= \bar{W}^{p+1/2} + \tau \{ \Lambda_3 \bar{W}^{p+1/2} + \gamma_3 \bar{B}^{p+1/2} \}.\end{aligned}\quad (6)$$

Подробные формулы можно получить из выражений, приведенных в работе [2] для трехмерных нестационарных задач теории термоупругопластичности, после перехода к цилиндрической системе координат и с учетом очевидных упрощений, обусловленных двумерностью данной задачи.

Анализ результатов численного решения. В результате применения метода покомпонентного расщепления, приведенного выше, получены численные результаты. На рис. 2 показано изменение во времени величины σ_r / σ_s , а на рис. 3 представлено изменение кольцевых напряжений $\sigma_\varphi / \sigma_s$.

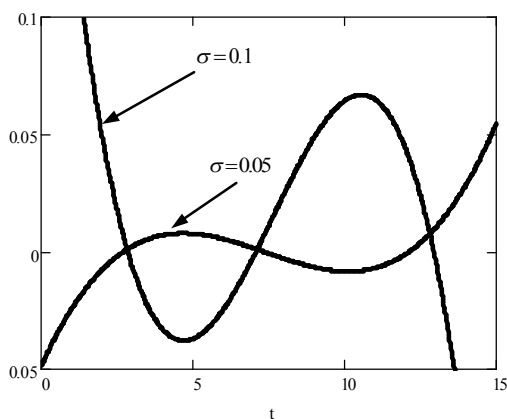


Рис. 2

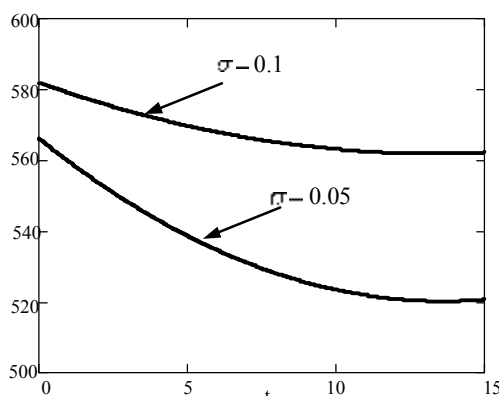


Рис. 3

Максимальные изменения решения наблюдаются в узлах 9, 10, расположенных в окрестности исходного цилиндра $r = R_1$.

Заключение. Анализ полученных результатов показывает, что в результате нара-

щивания тела по описанной выше схеме температура начинает заметно перераспределяться, скорость изменения температуры уменьшается и стремится к нулю, но вызванные тепловым ударом напряжения продолжают волнообразно изменяться. Добавление следующего слоя вносит дополнительные изменения в этот процесс.

Список литературы

1. Марчук Г. И. Методы расщепления / Г. И. Марчук. – М. : Наука, 1988. – 263 с.
2. Стебляк П. А. Методы расщепления в пространственных задачах теории пластичности / П. А. Стебляк. – К. : Наукова думка, 1998. – 304 с.
3. Стебляк П. А. Численное определение нестационарного температурного поля в растущем по известному закону слое / П. А. Стебляк, П. А. Еременко // Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету – 2002. – Вип. 3 (114). – С. 136–137.
4. Алберг Дж. Теория сплайнов и ее приложения / Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. – М. : Книга по требованию, 2012. – 319 с.
5. Малачівський П. С. Неперервне й гладке мінімаксне сплайн-наближення / П. С. Малачівський. – К. : Наук. думка, 2013. – 270 с.
6. Стебляк П. А. Визначення температурних напружень в циліндричному тілі, що збільшується за відомим законом / П. А. Стебляк, Н. Н. Волосова, К. Е. Дьомічев // Математичні проблеми технічної механіки : зб. наук. праць Дніпродзерж. держ. техн. ун-ту. Темат. випуск. – Вип. 1 (24). – Дніпродзержинськ, 2014. – С. 8–13.
7. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики / Н. Н. Яненко. – Новосибирск : Наука, 1967. – 195 с.
8. Вабищев П. Н. Аддитивные операторно-разностные схемы (схемы расщепления) / П. Н. Вабищев. – М. : Наука, 2013. – 464 с.

References

1. Marchuk, G. I. (1988) Methods of splitting. Moscow: Nauka, 263 p. [in Russian].
2. Steblyanko, P. A. (1998) Methods of splitting in spatial problems of the theory of plasticity. Kiev: Naukova dumka, 304 p. [in Russian].
3. Steblyanko, P. A. and Eremenko, P. A. (2002) Numerical determination of nonstationary temperature field in the layer, growing according to the well-known law. *Visnyk Kre-menchutskogo derzhavnogo politechnichnogo universytetu*, 3 (114), pp. 136–137 [in Russian].
4. Alberg, J., Nilson, E. and Walsh, J. (2012) The theory of splines and its applications. Moscow: Kniga po trebovaniyu, 319 p. [in Russian].
5. Malachivsky, P. S. (2013) Continuous and smooth minimax spline approximation. Kyiv: Naukova dumka, 270 p. [in Ukrainian].
6. Steblyanko, P. A., Volosova, N. N. and Dyomichev, K. E. (2014) Determination of temperature stress in cylindrical body that increases according to the well-known law. *Matematychni problemy tekhichnoyi mehaniky*: collection of scient. works of Dniprodzerzhinsk State Technical University. Special Issue, 1 (24). Dniprodzerzhinsk, pp. 8–13 [in Ukrainian].
7. Yanenko, N. N. (1967) The method of fractional steps for solving multidimensional problems of mathematical physics. Novosibirsk: Nauka, 195 p. [in Russian].
8. Vabischev, P. N. (2013) Additive operating-difference schemes (schemes of splitting). Moscow: Nauka, 464 p. [in Russian].

P. A. Steblyanko, *D.Sc., professor*,
Dneprodzerzhynsk State Technical University
Dneprostroyevskaya str., 2, Dneprodzerzhinsk, 51918, Ukraine

K. E. Dyomichev, *lecturer*
Cherkasy State Technological University
Shevchenko blvd, 460, Cherkasy, 18006, Ukraine
demichev@mail.ru

THE DETERMINATION OF NONSTATIONARY THERMOSTRESSED STATE IN CYLINDRICAL TUBE, GROWING ACCORDING TO CERTAIN LAW

The problem of the determination of nonstationary thermostressed state in cylindrical tube, growing according to certain law, is considered. A characteristic feature of cylindrical bodies at such thermomechanical processes consists in the redistribution of temperature, stress and strain due to continuous or discrete addition of material.

The aim of the work is to determine stress-strained state of growing cylindrical body by component splitting method using cubic B-splines and to obtain numerical stress relationships.

To determine thermostressed state one of the most effective methods for numerical solution of spatial nonstationary problems of thermoelastic plasticity theory – component splitting method in conjunction with the presentation of unknown quantities in the form of spline functions – is used.

The analysis of the results shows that by increasing the body according to described above scheme the temperature becomes significantly redistributed, the rate of temperature change decreases and tends to zero, but the stresses caused by thermal shock continue to change in undulatory way. The addition of the next layer makes additional changes to the process.

Keywords: nonstationary thermostressed state, component splitting method, spline functions.

*Рецензенти: В. М. Рудницький, д.т.н., професор,
О. О. Богатирьов, к.ф.-м.н., доцент.*