УДК 536.2 : 519.6

Б. П. Головня, *д.т.н., професор,*
Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького,
б-р Шевченка, 81, м. Черкаси, Україна
golovnya@list.ru
В. В. Хайдуров, *викладач*
Черкаської філії ПВНЗ «Європейський університет»,
вул. Смілянська 83, м. Черкаси, Україна
allif@rambler.ru

МЕТОД ЗНАХОДЖЕННЯ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ДВОВИМІРНОЇ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Актуальність статті обумовлюється тим, що існує ряд промислових задач, для яких потрібно побудувати ефективні методи, які б добре розв'язували їх. Експериментальні методи дослідження теплофізичних процесів дають досить багато інформації про тепловий стан об'єкта. У зв'язку з цим, основна мета роботи – запропонувати методику по знаходженню чисельного розв'язку оберненої задачі теплопровідності (ОЗТ). У роботі описано методику розв'язання ОЗТ на основі методу найшвидшого спуску з попередньою побудовою наближення до початкової умови задачі із використанням методу Фур'є. Для розв'язання оберненої задачі, як відомо з практики, потрібно досить багато обчислень і часу. Разом з тим, слід відзначити, що при використанні описаних у статті методів зменшується кількість викликів функції при знаходженні глобального мінімуму квадратичного функціонала, який використовується для розв'язання класу подібних обернених задач.

Ключові слова: *обернена задача теплопровідності, квадратичний функціонал, градієнтні методи, метод Ньютона.*

Вступ. Методи розв'язування обернених задач теплопровідності дають можливість досліджувати складні, нелінійні процеси теплообміну, володіють високою інформативністю [10], дозволяють проводити експериментальні дослідження в умовах безпосередньої експлуатації технічних систем. За допомогою таких методів можна обирати проектно-конструкторські та технологічні рішення. Тому нині в теплофізиці й теплотехніці активно розвивається науковий напрям [12–14], що базується на методології обернених задач теплопровідності [1, 2–4, 8–10]. Як і більшість завдань такого роду, ця задача також зводиться до оптимізації нелінійного функціонала. Видом обмежень на шукані параметри функціонала є диференціальні рівняння [1, 3, 5]. В цьому випадку таким обмеженням виступають саме рівняння теплопровідності. Методи в [1, 2, 7] пов'язані з пошуком оптимальних розв'язків задач з використанням обмежень у вигляді диференціальних рівнянь. Основна **мета статті** – прискорення відомих оптимізаційних методів розв'язку цього класу задач. Перед тим як переходити до оберненої задачі, спочатку буде описана пряма задача теплопровідності.

Опис методу. Пряма задача теплопровідності в однорідному стержні довжиною L формулюється таким чином [2, 6]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, x \in [0; L], t \in \left[0, t_f\right]. \quad (1)$$

Початкові умови: $T(x,0) = \theta(x)$. Граничні умови можуть бути довільними. Як приклад візьмемо умови Дирихле:

$$T(0,t) = 0, T(L,t) = 1. \quad (2)$$

Розв'язавши пряму задачу, знаходиться розподіл температури у момент часу t_f – $T\left(x,t_f\right) = \Theta(x)$.

Тоді обернена задача до (1), (2) формулюється таким чином: знаючи рівняння (1), граничні умови (2) та кінцевий розподіл температури $T\left(x,t_f\right) = \Theta(x)$, відновити початковий розподіл температури $T(x,0) = \theta(x)$.

Одна з найпопулярніших математичних постановок оберненої задачі має вигляд [4]: знайти $\theta(x)$ таке, що

$$J(\theta(x)) = \int_0^L \left(T(\theta, x, t_f) - \Theta(x)\right)^2 dx \to \min, \quad (3)$$

де $T(\theta, x, t_f)$ – результат розв'язку задачі

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, x \in [0; L], t \in [0, t_f],$$
$$T(x,0) = \theta(x). \quad (4)$$

Як граничні умови використовуються (2). Фактично задача (3), (1), (4), (2) являє собою задачу мінімізації з обмеженням у вигляді диференціальних рівнянь. Задача мінімізації розв'язується у дискретній постановці. На відрізку $[0; L]$ вводяться n вузлів x_i, $i = 1...n$. Отже, для розв'язання задачі (3) необхідно знайти значення $\theta_i = \theta(x_i) = T(x_i, 0)$, $i = \overline{1, n}$ в цих вузлах, тобто розв'язок залежить від n параметрів. Критерій мінімуму

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta_i} = 0, \ i = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Вважається, що $\theta = (\theta_1, ..., \theta_n)$.

Одним із найбільш популярних та швидкісних методів розв'язання цієї задачі є метод Ньютона. Для поставленої задачі він має вигляд:

$$G^k \Delta\theta^k = -R^k,$$
$$\theta^{k+1} = \theta^k + \Delta\theta^k. \quad (6)$$

Тут $G = (G_{ij}) = \left(\frac{\partial^2 J}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right)$ – матриця Гессе, $\Delta\theta = (\Delta\theta_1, ..., \Delta\theta_n)^T$ – вектор-стовпчик приростів параметрів, $R = (R_1, ..., R_n)^T = \left(\frac{\partial J}{\partial \theta_1}, ..., \frac{\partial J}{\partial \theta_n}\right)^T$ – вектор-стовпчик похідних цільової функції.

Цей метод для квадратичних функцій взагалі збігається за одну ітерацію [15]. При пошуку мінімумів аналітичних виразів він, разом зі своїми модифікаціями, є безумовним лідером.

Слід відзначити, що аналітично продиференціювати розв'язок по значенню початкової умови у конкретній точці неможливо, тому всі частинні похідні в (6) доведеться обраховувати чисельно. Для цього введемо такі математичні позначення: $\theta + \Delta\theta_i = (\theta_1, ..., \theta_{i-1}, \theta_i + \Delta\theta_i, \theta_{i+1}, ..., \theta_n)$. Тоді

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta_i} = \frac{J(\theta + \Delta\theta_i) - J(\theta)}{\Delta\theta_i}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 J(\theta)}{\partial \theta_i^2} = \frac{J(\theta + \Delta\theta_i) - 2J(\theta) + J(\theta - \Delta\theta_i)}{\Delta\theta_i^2}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 J(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \frac{J(\theta + \Delta\theta_i + \Delta\theta_j) - J(\theta - \Delta\theta_i + \Delta\theta_j)}{4\Delta\theta_i \Delta\theta_j} - \frac{\left(J(\theta + \Delta\theta_i - \Delta\theta_j) - J(\theta - \Delta\theta_i - \Delta\theta_j)\right)}{4\Delta\theta_i \Delta\theta_j}. \quad (9)$$

Кількість параметрів функціоналу дорівнює n (n – кількість внутрішніх вузлів сітки задачі). Для застосування стандартного методу Ньютона до цієї задачі потрібно обчислення матриці Гессе, яка має порядок n. Один виклик функції потребує розв'язання однієї прямої задачі теплопровідності [12]. Для елементів, які лежать на головній діагоналі гессіану, потрібно три виклики функції. Для кожного з інших елементів матриці Гессе потрібно рівно чотири виклики функції. Також потрібно врахувати, що на кожній ітерації методу Ньютона виконуються обчислення функції у новознайдених значеннях невідомих параметрів. Тепер слід відзначити, що кількість викликів функцій на кожній ітерації фіксована і квадратично залежить від кількості невідомих параметрів. У цій задачі вона буде дорівнювати:

$$N_f = 1 + 4(1 + 2 + ... + n) + 2n =$$
$$= 1 + 2n(n+1) + 2n = 2n^2 + 4n + 1.$$

Враховуючи, що кожний обрахунок значення $J(\theta)$ є розв'язком прямої задачі теплопровідності, отримуємо метод, який досить довго буде розв'язувати поставлену задачу через обчислення (9). Враховуючи це, було вирішено звернутися до методу найшвидшого спуску. Він вимагає обрахунку n похідних на кожну ітерацію.

Основною метою статті є зменшення кількості обчислень, зокрема кількості викликів функцій. Методом, за допомогою якого отримують наближення до початкової умови з подальшим його уточненням, є метод розкладу функції у ряд Фур'є. Подальша оптимізація проводиться методом найшвидшого спуску.

Відомий розв'язок у певний момент часу розкладається у ряд Фур'є. Потрібно знайти розподіл температури у початковий момент часу. Загальний розв'язок однорідної нестаціонарної задачі теплопровідності можна представити у вигляді

$$T(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-k^2 t} \sin(kx).$$

Очевидно, що в початковий момент часу

$$T(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(kx).$$

Введемо позначення:

$$D_k = C_k e^{-k^2 t}.$$

Тоді у довільний фіксований момент часу розв'язок можна представити так:

$$T(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \sin(kx).$$

Отриманий експериментальним шляхом розподіл температури розкладається в ряд та знаходяться невідомі D_k. Оскільки момент часу відомий, то з виразу $D_k = C_k e^{-k^2 t}$ легко знаходяться невідомі значення C_k, тим самим знаходиться наближення до початкової умови. Це наближення є урізаним рядом.

Загальний розв'язок будь-якого диференціального рівняння представляється у вигляді суми загального розв'язку однорідного рівняння та деякого частинного розв'язку неоднорідного рівняння. Описаний метод базується на тому факті, що розв'язок рівняння теплопровідності у певний момент часу t_f можна розкласти у ряд Фур'є, взявши лише кілька членів цього розкладу, після чого проводити процес уточнення. Спочатку опишемо нижче метод для одновимірного випадку.

Перш за все, буде розглянута стандартна пряма одновимірна задача теплопровідності в однорідному середовищі, яка має вигляд (1), (2). Далі до рівняння теплопровідності буде застосований метод розділення змінних [6]. Якщо $L = \pi$, то розв'язок цього рівняння з нульовими граничними умовами першого роду буде мати такий вигляд:

$$T(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-k^2 t} \sin(kx). \qquad (10)$$

Загальний розв'язок задачі типу (1), (2) записується у вигляді суми загального розв'язку однорідного рівняння та розв'язку неоднорідного рівняння. В таких задачах, як (1), (2), зробивши заміну змінних у рівнянні теплопровідності, її завжди можна звести до задачі з граничними умовами зі значеннями 0 та 1. У цьому випадку розв'язок задачі (1), (2) в момент часу t_f можна буде записати таким чином:

$$T(x,t_f) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-k^2 t_f} \sin(kx) + \frac{x}{\pi}. \qquad (11)$$

Використавши ряд Фур'є, було отримано загальний розв'язок задачі (1), (2) з граничними умовами $T(0,t) = 0$, $T(\pi,t) = 1$. Тоді початкову умову цієї ж задачі можна записати у вигляді

$$T(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(kx) + \frac{x}{\pi}. \qquad (12)$$

Оскільки потрібно знайти початкову умову (4) оберненої задачі (3), (1), (4), (2), то константи C_k отримуються розкладом розв'язку прямої задачі теплопровідності у момент часу t_f. Значення $T(x,t_f)$ у реальних технічних задачах може бути отримане експериментальним шляхом. Очевидно, що в (12) береться кілька членів розкладу початкової умови в ряд. У будь-якому випадку отримано наближення до початкової умови. Візьмемо в (12) N перших доданків. Тоді

$$T(x,0) \approx \sum_{k=1}^{N} C_k \sin(kx) + \frac{x}{\pi}. \qquad (13)$$

Вираз (13) є лише наближенням до початкової умови. У зв'язку з цим вводиться так звана функція поправки $f_{err}(x)$. Тоді будемо мати

$$T(x,0) = \sum_{k=1}^{N} C_k \sin(kx) + \frac{x}{\pi} + f_{err}(x). \qquad (14)$$

В (14) значення $C_k, k = \overline{1,N}$ відомі, тоді розв'язок задачі (3), (1), (4), (2) полягає у знаходженні $f_{err}(x)$. Для розв'язання цієї задачі використовується той же функціонал (2). Але в цьому випадку сам процес мінімізації (3) буде вже проводитися методом найшвидшого спуску для отриманого наближення до початкової умови. І, таким чином, суттєво зменшується кількість викликів функції. Для застосування цього інструменту знаходиться чисельно градієнт функціонала (3).

Перші похідні по невідомих аргументах функціонала (3), враховуючи, що він вже залежить від невідомої функції поправки, обчислюються з використанням підходу (7). Для знаходження мінімуму функціоналу (3) виконується рух у напрямі антиградієнта. Довжина кроку визначається будь-яким методом одновимірної безумовної оптимізації, наприклад, тим самим методом Ньютона.

У двовимірній оберненій задачі теплопровідності ситуація та сама. Розв'язок двовимірного рівняння теплопровідності представляється у вигляді суми загального розв'язку відповідного однорідного рівняння та деякого частинного розв'язку неоднорідного рівняння. Розв'язок неоднорідного рівняння знаходиться будь-яким чисельним методом. Процес знаходження розв'язку відповідного однорідного рівняння описаний нижче більш детально.

У рівнянні

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial T}{\partial x^2} + \frac{\partial T}{\partial y^2}\right) \tag{15}$$

розв'язок рівняння знаходиться в області $\Omega : [0; L_x] \times [0; L_y]$. На границях задані, наприклад, нульові умови першого роду. Застосовуючи метод розділення змінних, шуканий розв'язок шукається у вигляді $T(x, y, \tau) = F_1(x) F_2(y) F_3(t)$. Тоді буде отримана система диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} F_1(x) = \overline{C_1}\cos\lambda_1 x + \overline{C_2}\sin\lambda_1 x; \\ F_2(y) = \overline{C_3}\cos\lambda_2 y + \overline{C_4}\sin\lambda_2 y; \\ F_3(t) = \overline{C_5} e^{-\lambda^2 t},\ \lambda^2 = a\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\right). \end{cases}$$

Використавши граничні умови, загальний розв'язок однорідної задачі буде мати вигляд:

$$F_3(t) = e^{-a\left(\left(\frac{\pi n}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{L_y}\right)^2\right)t}. \tag{16}$$

$$T(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\frac{\pi n x}{L_x} \sin\frac{\pi m y}{L_y} F_3(t).$$

Далі процедура аналогічна одновимірному випадку.

Тепер вже функція поправки буде мати вигляд $f_{err}(x, y)$. Перенумерувавши всі невідомі параметри, можна записати похідні по невідомих аргументах функціоналу (3), які обчислюються, використовуючи (7).

Описаний метод тестувався на певних задачах. Слід відзначити, що описаний метод так само ефективний на задачах, в яких граничні умови змінюються в часі.

Як приклади будуть розглянуті дві обернені задачі теплопровідності.

Перша задача має таку постановку:

$$J(\theta(x, y)) = \int_0^1\int_0^1 \left(T(\theta, x, y, t_f) - \Theta(x, y)\right)^2 dxdy \to \min, \tag{17}$$

де $T(\theta, x, t_f)$ – розв'язок задачі.

$$\begin{gathered} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \\ (x, y) \in [0;1]^2, t \in [0, t_f],\ t_f = 0.1, \\ T(x, y, 0) = \theta(x, y). \end{gathered} \tag{18}$$

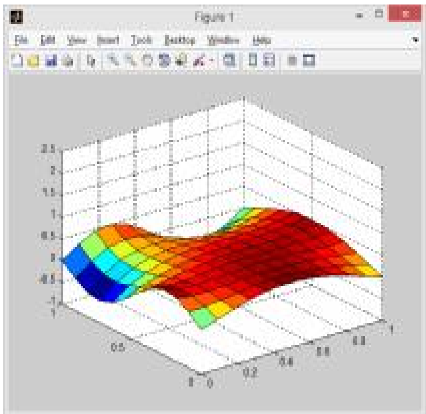
Граничні умови задачі мають такий вигляд:

$$\begin{gathered} T(x, 0, t) = 0.5\sin(\pi x), \\ T(x, 1, t) = 0.5\sin(2\pi x), \\ T(0, y, t) = 0.5\sin(2\pi y), \\ T(1, y, t) = 0.5\sin(\pi y). \end{gathered} \tag{19}$$

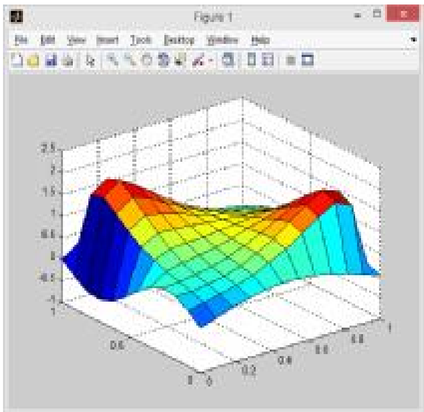
Друга задача, на якій проводилось тестування розробленого методу, відрізняється від першої тільки фінальним розподілом температури, який було отримано експериментальним шляхом.

В обох задачах потрібно знайти початковий розподіл температури на всій області. Результатом відновлення початкової умови першої задачі є функція від двох змінних, результат відновлення початкової умови у другій – константна температура у внутрішніх вузлах області.

На рис. 1, 2 показані результати роботи методу на двох вищерозглянутих задачах.

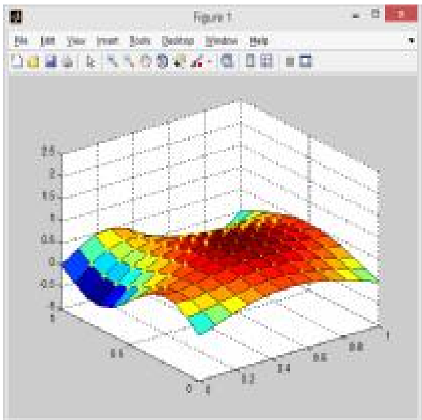


а) Розподіл температури у момент часу $t_f = 0.1$ для першої задачі

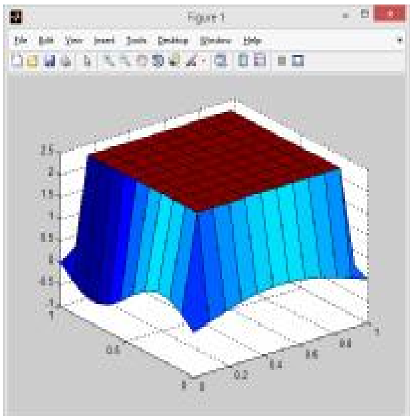


б) Відновлення початкової умови по заданому розподілу температури на рис.1, а

Рис. 1. Процес відновлення початкової умови першої задачі



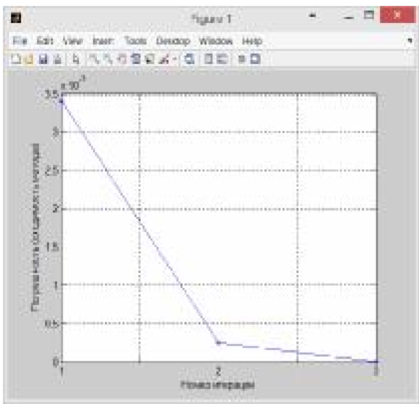
а) Розподіл температури у момент часу $t_f = 0.1$ для другої задачі



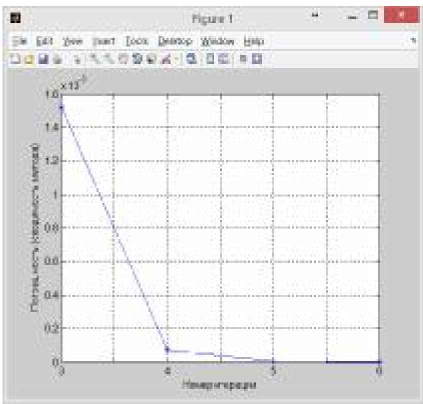
б) Відновлення початкової умови по заданому розподілу температури на рис.2, а

Рис. 2. Процес відновлення початкової умови другої задачі

У табл. 1 наведені результати роботи методу, без використання процедури побудови наближення до початкової умови. Також на рис. 3 та у табл. 2 показано збіжність описаного у статті методу розв’язання обернених задач теплопровідності типу (17)–(19) з використанням процедури побудови наближення до початкової умови на основі методу Фур’є. При розв’язанні розглянутих задач було взято чотири члени розкладу в ряд $(N = 4)$.



а) Перша задача



б) Друга задача

Рис. 3. Збіжність описаного методу на відповідних задачах

Таблиця 1

Таблиця результатів ефективності методу на вищерозглянутих задачах без побудови наближення до початкової умови

(сітка 40x40, точність обчислень 1e-6)

Перша задача		Друга задача	
Номер ітерації	Точність обчислень	Номер ітерації	Точність обчислень
8	2.54e-4	13	2.265e-5
9	3.15e-5	14	3.234e-5
10	5.17e-6	15	2.548e-6
11	1.52e-7	16	2.851e-7
Кількість викликів функції	18358	Кількість викликів функції	24640

Таблиця 2

Таблиця результатів ефективності методу на вищерозглянутих задачах з побудовою наближення до початкової умови

(сітка 40x40, точність обчислень 1e-6)

Перша задача		Друга задача	
Номер ітерації	Точність обчислень	Номер ітерації	Точність обчислень
1	3.41e-2	3	1.521e-3
2	2.5e-4	4	7.253e-5
3	5.25e-6	5	5.247e-6
4	1.25e-7	6	7.548e-7
Кількість викликів функції	6821	Кількість викликів функції	9287

Висновки. Розроблений метод працює ефективно на задачах, подібних до (2)–(4) та (17)–(19). Тестування цього методу було виконано на різних двовимірних задачах. Збіжність результатів є досить високою. Описаний метод досить швидко справляється з поставленою задачею. Основна її перевага полягає в тому, що для отримання бажаного результату використовується наближення до початкової умови задачі. Так само, певною перевагою методу є те, що кількість обчислень функції вже не квадратично залежить від кількості вузлів сітки, як у методах типу Ньютона, а лінійно, що значно скорочує час обчислень.

Список літератури

1. Engel. A MG method for the numerical solution of optimization problems. Constrained by PDE. – 2009. – 40 p.
2. Engel. A Newton-Multigrid method for PDE constrained optimization. – 2009. – 72 p.
3. Isakov V. Inverse problems for partial differential equations / V. Isakov. – USA : Springer, 2005. – 40 p.
4. Klibanov M. V. Approximate global convergence and adaptivity for coefficient inverse problem / M. V. Klibanov, L. Beilina. – USA : Springer, 2012. – 407 p.
5. Beilina L. Applied inverse problems. Annual workshop on inverse problems.
6. Jourhmane M. Relaxation procedures for an iterative algorithm for solving the Cauchy problem for the Laplace equation / M. Jourhmane, D. Lesnic, N. S. Mera // Eng. Anal. Boundary Elements. – 2004. – Vol. 28. – P. 655–665.
7. Kozlov V. A. On iterative procedures for solving ill-posed boundary value problems that preserve differential equations / V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya // Algebra i Analiz. – 1989. – Vol. 1. – P. 144–170 (English transl.: Leningrad Math. J., 1 (1990), pp. 1207–1228).
8. Kozlov V. A. An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations / V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, A. V. Fomin // Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz. – 1991. – Vol. 31. – P. 64–74 (English transl.: USSR Comput. Math. and Math. Phys. 31 (1991), pp. 45–52).
9. Lavrentiev M. M. Some improperly posed problems of mathematical physics / M. M. Lavrentiev. – Berlin: Springer,1967.
10. Lesnic D. An iterative boundary element method for solving numerically the Cauchy problem for the Laplace equation / D. Lesnic, L. Elliott, D. B. Ingham // Eng. Anal. Bound. Elem. – 1997. – Vol. 20. – P. 123–133.
11. Li J. An adaptive finite element reconstruction of distributed fluxes / J. Li, J. Xie, J. Zou // Inv. Probl. – 2011. – Vol. 27. – 075009.
12. Marin L. Boundary element method for the Cauchy problem in linear elasticity / L. Marin, L. Elliott, D. B. Ingham, D. Lesnic // Eng. Anal. Boundary Elem. – 2001. – Vol. 25. – P. 783–793.
13. Xin-She. Real-time PDE-constrained optimization / Xin-She. – 2010. – 45 p.
14. Лаптев Г. И. Уравнения математической физики / Г. И. Лаптев, Г. Г. Лаптев. – М., 2003. – 82 с.
15. Жалдак М. І. Основи теорії і методів оптимізації. / М. І. Жалдак, Ю. В. Триус. – Черкаси : Брама-Україна, 2005. – 608 с.

References

1. Engel (2009) A MG method for the numerical solution of optimization problems constrained by PDE, 40 p.
2. Engel (2009) A Newton-Multigrid method for PDE constrained optimization, 72 p.
3. Isakov, V. (2005) Inverse problems for partial differential equations. USA: Springer, 40 p.
4. Klibanov, M. V. and Beilina, L. (2012) Approximate global convergence and adaptivity for coefficient inverse problem. USA: Springer, 407 p.
5. Beilina, L. Applied inverse problems. Annual workshop on inverse problems.
6. Jourhmane, M., Lesnic, D. and Mera, N. S., (2004) Relaxation procedures for an iterative algorithm for solving the Cauchy problem for the Laplace equation. *Eng. Anal. Boundary Elements*, (28), pp. 655–665.
7. Kozlov, V. A. and Maz'ya, V. G. (1989) On iterative procedures for solving ill-posed boundary value problems that preserve differential equations. *Algebra i analiz*, (1), pp. 144–170. (English transl.: *Leningrad Math. J.*, 1 (1990), pp. 1207–1228).
8. Kozlov, V. A., Maz'ya, V. G. and Fomin, A. V. (1991) An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations. *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.*, (31), pp. 64–74. (English transl.: *USSR Comput. Math. and Math. Phys.,* 31 (1991), pp. 45–52).
9. Lavrentiev, M. M. (1967) Some improperly posed problems of mathematical physics. Berlin: Springer.
10. Lesnic, D., Elliott, L. and Ingham, D. B. (1997) An iterative boundary element method for solving numerically the Cauchy problem for the Laplace equation. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, (20), pp. 123–133.
11. Li, J., Xie, J. and Zou, J. (2011) An adaptive finite element reconstruction of distributed fluxes. *Inv. Probl.*, (27), 075009.
12. Marin, L., Elliott, L., Ingham, D. B. and Lesnic, D. (2001) Boundary element method for the Cauchy problem in linear elasticity. *Eng. Anal. Boundary Elem.*, (25), pp. 783–793.
13. Xin-She (2010) Real-time PDE-constrained optimization, 45 p.
14. Laptev, G. I. and Laptev, G. G. (2003) Mathematical physics equations. Moscow, 82 p. [in Russian].
15. Jaldak, M. I. and Trius, U. V. (2005) Fundamentals of the theory and methods of optimization. Cherkasy: Brama-Ukraine, 608 p. [in Ukrainian].

B. Golovnya, *D.Tech.Sc., professor,*
Cherkasy National University named after Bohdan Khmelnitsky
Shevchenko blvd, 81, Cherkasy, Ukraine
golovnya@list.ru
V. Haydurov, *lecturer*
Cherkasy branch of European University
Smelyanskaya str., 83, Cherkasy, Ukraine
allif@rambler.ru

A METHOD FOR NUMERICAL SOLUTION OF TWO-DIMENSIONAL INVERSE HEAT CONDUCTION PROBLEM

As we know, experimental methods of the investigation of thermal processes provide the most accurate information about thermal state of an object. It is clear that all studies of this kind cannot be a comprehensive source of information about certainty, given the fact that every experiment is unique on its own account. These facts contribute to the development of mathematical modeling as such. In this regard, the main purpose of the work is to offer a method for numerical solution of a class of inverse heat conduction problems (IHCP). The paper describes a method for IHCP solution on the basis of the method of steepest descent with previous construction of good approximation to initial condition of the problem using Fourier method.

The article is relevant due to the fact that there are a number of industrial tasks, for which you need to build effective methods that cope well with them. To solve the inverse problem, as it is known from practice, you need a lot of computing time. However, it should be noted that the main objective of this article is to reduce the number of function calls when finding the global minimum of a quadratic functional that is used for the solution of such inverse problems. Calling one function while minimizing the quadratic functional requires one call to the procedure for the solution of direct heat conduction problem. The process of minimization of the corresponding quadratic functional, as has been already mentioned, takes a lot of computing time. This disadvantage is particularly evident when solving multidimensional problems.

Keywords: *inverse heat conduction problem, quadratic functional, gradient methods, Newton's method.*

Рецензенти: Ю. О. Ляшенко, д.ф.-м.н., професор,
Ю. В. Триус, д.пед.н., професор